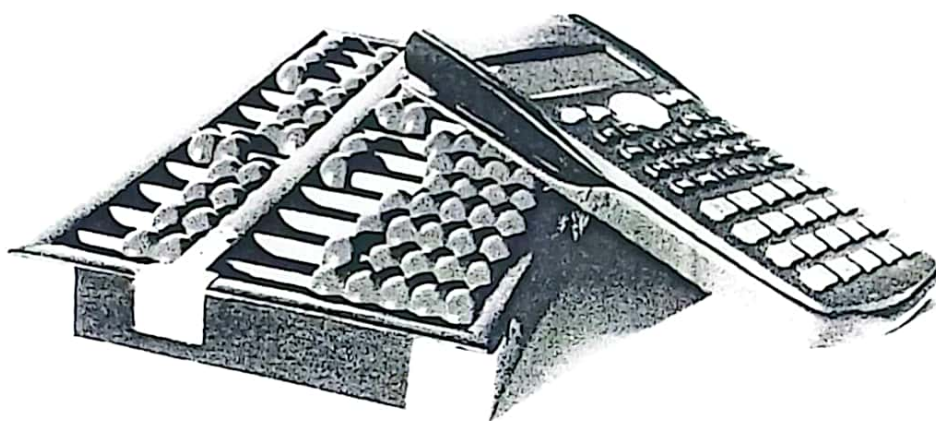


III Semana da Matemática da FAFISETE



“Educação Matemática: presente e futuro”

PROGRAMA E NOTAS

28 de setembro a 01 de outubro de 2004

Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de
Sete Lagoas

Fundação Educacional Monsenhor Messias

III SEMANA DA MATEMÁTICA DA FAFISETE

“Educação Matemática: presente e futuro”

Sete Lagoas
setembro/outubro
2001

Comissão Organizadora

Prof. MSc. Frederico Reis Marques de Brito
(Coordenador Geral)

Prof. MSc. Paulo Henrique Dias Menezes
(Coordenador do curso de Matemática)

Prof. Maurilo Campolina Diniz Peixoto

Artes Gráficas

Fabício Coelho

Colaboradores

Prof. Cláudia Silva Tavares

Alunos:

Ana Flávia Torres Lima Lopes

João Fábio Geovani dos Santos

Luciana Carolina Teixeira Gonçalves

Lusiana Geralda Rodrigues Marinho

Mariana Teixeira Silva

Rafaela Cristina de Oliveira

Renata Gonçalves de Almeida

Ricardo Garcia de Castro

PROGRAMAÇÃO

Data: 28/09 - Terça Feira

Noite:

19:30 - Sessão de Abertura : "Apresentação Artística"

20:00 - Plenária Inaugural: Conhecimento e Universidade

Prof. Doutor Antônio Zunpano (DMAT - UFMG)

Local: Auditório Dr. Marcelo Vianna

Data: 29/09 - Quarta Feira

Manhã:

08:30 - Palestra: Contando a História da Contagem

Palestrante: Profa. Cláudia Tavares (FAFISETE)

Local: Mini auditório da biblioteca

Noite: 19:00 - Palestra: Problemas Curiosos e Loterias

Palestrante: Prof. Jorge Sabatucci (DMAT - UFMG)

Local: Auditório Dr. Marcelo Vianna

20:15 - Mesa Redonda:

O Livro Didático de Matemática no Brasil

Autores de livros didáticos de Matemática

Mediador: Prof. Paulo Menezes (FAFISETE)

Data: 30/09 - Quinta Feira

Manhã: 09:00- Apresentação dos Vídeos:

Observando a Natureza e Pela Trilha de Arquimedes

Comentarista: Prof^ª. Vera Regina Lima de Faria e Flores (FAFISETE)

Local: Mini auditório da biblioteca

Noite:

19:00 - Apresentação dos Vídeos:

Observando a Natureza e Pela Trilha de Arquimedes

Comentarista: Prof^ª. Vera Regina Lima de Faria e Flores (FAFISETE)

Local: Auditório Dr. Marcelo Vianna

20:15 - Mesa Redonda:

Habilidades Matemáticas da População Brasileira na Composição do Indicador Nacional do Analfabetismo Funcional (Inaf).

Palestrantes:

Prof^ª. Dr^ª. Maria Laura Magalhães Gomes (DMAT - UFMG)

Prof^a. Dr^a. Maria da Conceição Reis Fonseca (FAE - UFMG)

Prof^a. Dr^a. Ana Maria Simões Coelho (FAE - UFMG)

Local: Auditório Dr. Marcelo Vianna

Data; 01/10 - Sexta Feira

Manhã:

08:30 - Palestra: 50 vagas

Aprendizagem Significativa: modelo cognitivo para mudanças conceituais.

Palestrante: Prof. Paulo Menezes (FAFISETE)

Local: Mini auditório da biblioteca

Noite:

19:10 - Relato de Experiência: 50 vagas

Matemática Divertida: Trabalhando Frações e Decimais com Jogos Matemáticos

Profa. Cibele Vieira Teixeira Coelho (Colégio Cenecista Márcio Paulino)

Local: Sala 14T - prédio 3 (FAFISETE)

19:10 - Palestra: 40 vagas

Contando a História da Contagem

Palestrante: Prof^a. Cláudia Tavares (FAFISETE)

Local: Sala 27S - prédio 2 (FAGE)

19:10 - Palestra: 50 vagas

Números Místicos

Palestrante: Prof. Frederico Reis Marques de Brito (FAFISETE)

Local: Sala 22S - prédio 2 (FAGE)

19:10 - Palestra: 50 vagas

As Novas Tecnologias como Recurso Didático na Educação Matemática

Palestrante: Prof. Constantino V. dos Santos Filho (Unicentro Newton Paiva)

Local: Sala 18S - prédio 2 (FAGE)

20:20 - Palestra: 40vagas

O Papel da Literatura no Ensino da Matemática.

Palestrante: Profa. Leni Nobre (FAFISETE)

Local: Sala 27S - prédio 2 (FAGE)

20:20 - Palestra: 40vagas

Um terrível impasse matemático entre Telemar, Cemig e Copasa

Palestrante: Prof. Ricardo Saldanha (FAFISETE) e José Sérgio (aluno do

8º período de Matemática)

Local: Sala 14T - prédio 3 (FAFISETE)

20:20 - Oficina: 36 vagas

O Jogo das Operações

Resp.: Prof. Eduardo Sarquis (FAFISETE)

Alunos: Mariana Teixeira, Renata Moura e Wagner Barbosa (6ª Matemática)

Local: Sala 29S (Laboratório de Ensino de Matemática) - prédio 2 (FAGE-SETE)

20:20 - Palestra: 50 vagas

Aprendizagem Significativa: modelo cognitivo para mudanças conceituais.

Palestrante: Prof. Paulo Menezes (FAFISETE)

Local: Sala 22S - prédio 2 (FAGE)

21:30 - Sessão de Encerramento

"Apresentação Artística"

Local: Auditório Dr. Marcelo Vianna

Exposição de Livros didáticos e paradidáticos de Matemática

Dias 28, 29 e 30 de setembro de 19:00 as 21:00 horas

Local: Saguão do Auditório Dr. Marcelo Vianna.

OPTE LIVROS

Índice

Números Místicos	1
O papel da literatura no ensino da matemática.....	7
Contando a história da contagem.....	14
Um terrível impasse matemático entre TELEMIG, CEMIG e COPASA.....	21
Problemas curiosos e loterias.....	24
Aprendizagem significativa: modelo cognitivo para mudanças conceituais.....	30
Jogo das operações.....	39
As novas tecnologias como recurso didático no processo da educação matemática	43
Matemática divertida: trabalhando frações e números decimais com jogos matemáticos	46

Números Místicos

Frederico Reis Marques de Brito¹

Resumo

Trataremos nesse artigo de algumas das propriedades dos números que foram considerados místicos pelo matemático Samuel Yates. Trata-se dos números que, na base 10, são escritos usando-se somente o algarismo 1: 1, 11, 111, 1111, ... Daremos especial atenção a algumas das propriedades sobre sua fatoração.

Introdução

Podemos entender o uso do adjetivo "místicos", adotado por Yates para referir-se a esses números, ao verificamos, por exemplo, que:

$$\begin{aligned}1 \times 9 + 2 &= 11 \\12 \times 9 + 3 &= 111 \\123 \times 9 + 4 &= 1111 \\1234 \times 9 + 5 &= 11111 \\12345 \times 9 + 6 &= 111111 \\123456 \times 9 + 7 &= 1111111 \\1234567 \times 9 + 8 &= 11111111 \\12345678 \times 9 + 9 &= 111111111 \\123456789 \times 9 + 10 &= 1111111111,\end{aligned}$$

¹Bacharel e Mestre em Matemática pela UFMG, doutorando pela UNICAMP, professor do depto de Matemática da FAFISETE, FEMM - Sete Lagoas.

ou ainda,

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 11^2 &= 121 \\ 111^2 &= 12321 \\ 1111^2 &= 1234321 \\ &\vdots \\ 11111111^2 &= 12345678987654321 \end{aligned}$$

Usualmente, chamamos os números da forma $R_n = \underbrace{1111 \cdots 111}_{n \text{ algarismos}}$, de repunidades², nome adotado por Albert H. Beiler em 1964, significando algo como unidades replicadas (ou repetidas). Como se pode verificar facilmente,

$$R_n = \frac{10^n - 1}{9} = \sum_{k=0}^{n-1} 10^k,$$

Além disso, podemos defini-los recursivamente pondo:

$$\begin{aligned} R_1 &= 1 \\ R_n &= 10 \cdot R_{n-1} + 1, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Exercício 1. *Mostre que $R_{n+1} = 9 \cdot (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) + n$.*

Em [3] encontramos uma interessante aplicação das repunidades: Ao escrevermos todos os números naturais de 1 até N , o número total de dígitos escritos é

$$n \cdot (N + 1) - R_n,$$

em que n representa o número de dígitos de N .

Encerramos essa introdução, estabelecendo algumas notações:

Sejam $n, a, b \in \mathbb{Z}$ e $n > 0$, diremos que $n|b$, se existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $b = n \cdot q$ e que $n \nmid b$, caso contrário. Assim, $3|90$ e $3 \nmid 14$. Além disso, definimos a relação de congruência módulo n (noção introduzida por Gauss em seu "Disquisitiones Arithmeticae"), da seguinte forma: $a \equiv b \pmod{n}$, se, e somente se, $n|(a - b)$, ou seja, quando a e b deixam o mesmo resto na divisão por n . Por exemplo: $15 \equiv 31 \pmod{8}$. Essa é uma notação bastante conveniente e não é difícil mostrar que se $a \equiv b \pmod{n}$ então $a^k \equiv b^k \pmod{n}$, para qualquer $k \in \mathbb{N}$. Finalmente, observamos que $a \equiv 0 \pmod{n}$, se e só se, $n|a$, ou seja a é múltiplo de n .

²do inglês "repunits", uma contração dos termos "repeated" e "units".

Propriedades Sobre Divisibilidade

Proposição 1. *Exceto $R_1 = 1$, nenhum R_n é quadrado perfeito.*

Demonstração : Observe que:

$$R_2 = 11 = 4 \times 2 + 3$$

$$R_3 = 111 = 100 + 11 = 4 \times 25 + 4 \times 2 + 3 = 4 \times 27 + 3$$

$$R_4 = 1111 = 1100 + 11 = 4 \times 275 + 11 = 4 \times 277 + 3$$

$\vdots$

$$R_n = 111\dots 11 = 111\dots 00 + 11 = 100 \cdot R_{n-2} + 4 \times 2 + 3 = 4l + 3,$$

em que $l = 25 \cdot R_{n-2} + 2$. Portanto, para $n \geq 2$, R_n deixa resto 3 na divisão por 4. Por outro lado, como todos as repunidades são ímpares, se algum deles fosse um quadrado perfeito seria o quadrado de algum número ímpar. Assim, $R_n = (2k + 1)^2 = 4(k^2 + k) + 1$ seria da forma $4q + 1$, ou seja, R_n deixaria resto 1 na divisão por 4, contrariamente ao que provamos acima. ■

Também é possível provar que, exceto $R_1 = 1$, nenhuma repunidade é um cubo perfeito.

Provavelmente o maior interesse despertado pelas repunidades seja com respeito a sua fatoração. Por exemplo, $R_2 = 11$ é primo, já $R_3 = 111$ é múltiplo de 3, enquanto que $R_4 = 1111$ é múltiplo de R_2 (note que se n é par R_n é múltiplo de 11.). Daremos a seguir alguns resultados sobre os fatores de R_n .³

Proposição 2. *Se n é um número natural composto então R_n também é composto.*

Demonstração : Mais que isso, demonstraremos que se $n|m$ então $R_n|R_m$. Suponha que $n = m \cdot k$, com $k \in \mathbb{N}$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} 9 \cdot R_n &= (10^m)^k - 1 = (10^m - 1) \cdot (1 + 10^m + 10^{2m} + \dots + 10^{(k-1)m}) \Rightarrow \\ R_n &= R_m \cdot (1 + 10^m + 10^{2m} + \dots + 10^{(k-1)m}). \end{aligned}$$

Donde se conclui que $R_m|R_n$. ■

Somos levados a nos perguntar se vale a recíproca, isto é, se quando n é primo R_n também o é. Como já dissemos, R_3 não é primo, o que demonstra

³Para o próximo resultado, lembramos que $x^k - 1 = (x - 1) \cdot (1 + x + x^2 + \dots + x^{k-1})$, como podemos demonstrar fazendo uma indução simples em k .

que a recíproca da proposição anterior é falsa. Aliás fatorando os primeiros R_p , com p primo, temos:

$$\begin{aligned} R_5 &= 41 \times 271 \\ R_7 &= 239 \times 4649 \\ R_{11} &= 21649 \times 513239 \\ R_{13} &= 53 \times 79 \times 265371653 \\ R_{17} &= 2071723 \times 5363222357 \\ R_{29} &= 3191 \times 16763 \times 43037 \times 62003 \times 77843839397 \\ R_{31} &= 2791 \times 6943319 \times 57336415063790604359 \end{aligned}$$

R_{19} e R_{23} são primos. Depois desses, as próximas repunidades primas são R_{317} e R_{1031} , descobertos em 1978 e 1986, respectivamente. Já foi provado, [1], que não existem outros primos entre R_n se $n < 50000$. Permanece em aberto a questão de se há infinitos R_n primos.

Proposição 3. *Se $p \neq 2, 5$ é primo então existem infinitos índices n tais que $p | R_n$.*

Demonstração : O caso $p = 3$ é trivial, pois $3 | R_{3n} \forall n \in \mathbb{N}$. Para os demais casos, usaremos o Pequeno Teorema de Fermat, pelo qual se p é primo e $p \nmid n$ então $p | (n^{p-1} - 1)$, em particular,

$$p | (9 \cdot R_{(p-1)}) = 10^{p-1} - 1.$$

Desde que $p \neq 3$ é primo então podemos concluir que $p | R_n$, pelo Lema de Euclides ⁴. O resultado segue usando a demonstração da proposição 2. ■

Os divisores de R_p , p primo, gozam de uma propriedade especial, que enunciamos a seguir.

Proposição 4. *Se $p > 5$ é primo e d é um divisor de R_p então $d \equiv 1 \pmod{p}$.*

Demonstração : Se $d = 1$ nada temos a provar. Seja $d = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_k^{a_k}$ a decomposição de d em números primos. Observe que $3 | R_p$, se, e somente se, $3 | p \Rightarrow p = 3$ e já que estamos supondo $p > 5$, concluímos que $p_i > 5$. Pelo Teorema de Bezout ⁵, podemos encontrar $a, b \in \mathbb{N}$ tais que $ap - b \cdot (p_i - 1) = \text{mdc}(p, p_i - 1)$. Além disso:

$$p_i | d \Rightarrow p_i | R_p \Rightarrow p_i | (9 \cdot R_p) = 10^p - 1,$$

⁴Se p é primo e $p | ab$ então $p | a$ ou $p | b$.

⁵O máximo divisor comum entre dois inteiros é uma combinação linear inteira deles.

ou seja,

$$p_i | (10^{ap} - 1) . \quad (1)$$

Por outro lado,

$$p_i | R_{p_i-1} \Rightarrow p_i | \frac{10^{p_i-1} - 1}{9} \Rightarrow p_i | (10^{bp_i-1} - 1) \quad (2)$$

De (1) e (2), podemos concluir que

$$p_i | (10^{ap} - 10^{b(p_i-1)}) \Leftrightarrow p_i | 10^{bp_i} (10^{ap-b(p_i-1)} - 1) \quad (3)$$

e, desde que $q > 5$,

$$p_i | (10^{ap-b(p_i-1)} - 1) \Rightarrow p_i | (10^{\text{mdc}(p, p_i-1)} - 1) \quad (4)$$

Se $(p, p_i - 1) = 1$ então $p_i | 9$, ou seja, $p_i = 3$, o que constitui um absurdo. Logo, $(p_i - 1, p) = p$, já que p é primo, o que implica que $p_i \equiv 1 \pmod{p}$, $\forall 1 \leq i \leq k$. Conclui-se que

$$p_i^{a_i} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow d \equiv 1 \pmod{p} .$$

■

Aplicando 4 podemos obter mais uma (dentre as possivelmente infinitas) demonstração da infinidade de números primos. De fato, suponha, por absurdo, o conjunto de primos finito e nesse caso, seja p o maior número primo. Claramente R_p tem algum divisor primo, digamos q . Por 4, $q \equiv 1 \pmod{p}$. Portanto, $q > p$, contrariamente à hipótese de que p era o maior dentre todos os primos.

Exercício 2. *Mostre que os únicos restos possíveis na divisão de R_n por $R_2 = 11$ são 0 e 1.*

Exercício 3. *Mostre que se $5|n$ então $41|R_n$.*

Referências

- [1] DUBNER, H. Generalized repunits primes , Math. Comp., 61, 1993, 927-930.
- [2] MURTHY, Amarnath, On the divisors of the unary sequence , Smarandache Notions Journal, vol -11, 2000.

- [3] PATERLINI, Roberto Ribeiro, **Quantos dígitos...?**, Revista do Professor de Matemática (33), 1997, 30-35.
- [4] RIBEMBOIN, Paulo , **Números primos: mistérios e recordes.** Coleção Matemática Universitária. Rio de Janeiro: IMPA, 2001.
- [5] YATES, Samuel, **The mystique of repunits**, Mathematics Magazine (51), nº 1, 22-28.
- [6] , **Repunits and repetends**, Boyton Beach: Star Publ. Co.,1982.

O Papel da Literatura no Ensino da Matemática

Frederico Reis Marques de Brito⁶
Leni Nobre de Oliveira⁷

"O matemático, como o pintor ou o poeta, é um desenhista. Se os seus desenhos são mais duradouros que os deles, é porque são feitos de idéias."

G. H. Hardy

Resumo

Discutiremos, à partir de nossa experiência no Projeto Oficina da Palavra, a pertinência do uso da literatura como meio do ensino da matemática.

Que motivo levaria um livro de narrativas árabes envolvendo curiosidades, enigmas e folclore da matemática a se tornar um *best seller* e tornaria o seu autor um dos escritores mais bem-sucedidos e conhecidos dos brasileiros, um povo que, segundo pesquisas comprovadas se vangloria em dizer que não sabe matemática⁸ e que confirma que esse tipo de pensamento é até uma forma de se declarar sanidade mental, uma vez que aprofundamento em matemática é coisa para doido? Como um livro não indicado normalmente nos espaços escolares e acadêmicos como *O Homem que Calculava* atinge a sua 38ª edição, traduzido em 12 idiomas, com uma média de dois milhões de exemplares já vendidos, após quase um século de encantamento de leitores

⁶Bacharel e Mestre em Matemática pela UFMG, doutorando pela UNICAMP na área de Geometria, professor do depto de Matemática da FAFISETE.

⁷Professora do depto de Letras da FAFISETE, licenciada em Língua e Literatura de expressão portuguesa pela UFV, Especialista em Literatura Brasileira pela PUC-Minas, Mestre em Teoria da Literatura pela UFMG, Doutoranda em Literatura Comparada pela UFMG.

⁸Segundo o matemático G. H. Hardy, em [7], "a maioria das pessoas tem tanto medo do nome matemática que está sempre pronta, sem falsa modéstia, a exagerar a sua própria burrice matemática."

dos mais diversos? Autor de uma obra extensa, o protagonista dessa façanha - Malba Tahan, pseudônimo de Julio César de Mello e Souza - escreveu 69 livros de contos e 51 de Matemática. Contra o ensino exclusivamente teórico e expositivo de sua época, Malba Tahan se levantou como um feroz crítico do professor de matemática que não ousava ser criativo. E denunciava: O professor de matemática em geral é um sádico, ele sente prazer em complicar tudo.

O sucesso desse autor está numa fórmula simples e milenar de passar conhecimentos: o uso da literatura. Acreditando ser a literatura uma forma de linguagem com excelente poder catalizador do diálogo do homem consigo mesmo, com os outros homens e com o mundo que o rodeia, Malba Tahan propôs a manutenção do exercício de pensar a ciência, o conhecimento e as formas com que eles se estabelecem como uma rede de informações formada por narrativas alegres, prazerosas e cheias de ensinamentos dos mais variados. E isso há quase 100 anos. Também dignas de citação são as incursões de Monteiro Lobato no mundo da Matemática, por meio de aventuras capazes de cativar crianças e adultos e tantos outros autores que propuseram em narrativas ficcionais ou não tratar de questões matemáticas, pondo à prova a teoria de que a matemática é um "bicho de sete cabeças".

Nossa reflexão sobre o papel da literatura no ensino da Matemática começou com a enriquecedora experiência do projeto Oficina da Palavra, subsidiado pela FEMM e executado no Colégio de Aplicação da mesma. Trata-se de uma tentativa de intermediar o ensino da matemática aos alunos de quinta à oitava séries, tentativa essa que nos levou, à certa altura do trabalho, face ao desinteresse dos alunos pela Matemática, a evidenciar a parceria entre matemática e literatura, já presente de forma acanhada em nosso trabalho, com a utilização de textos metamatemáticos, principalmente os narrativos, além da leitura e produção de obras de arte plásticas e textos literários, para que os alunos percebessem a utilização da matemática em variadas práticas humanas.

A partir do projeto propusemos aos 496 alunos de 5ª a 8ª séries que respondessem a seguinte pergunta:

"Ocupando o espaço abaixo, escreva para nós o que é a matemática para você. Não se preocupe se você acertou ou não. Esse exercício não vale ponto e o mais importante para nós é que você escreva o que você pensa que é a matemática. Mas escreva o que você pensa de verdade!!!"

Esperávamos, baseados em trabalhos e leituras anteriores oferecidas a eles, que tentassem elaborar um conceito para a matemática. Desejávamos estudar a pertinência de tais conceituações. Resumidamente, obtivemos os seguintes resultados:

Tabela 1: Resumo parcial das respostas obtidas da questão "O que é a matemática"

Número total de alunos		496
Número de respostas recebidas	100%	240
Só definiram	40%	96
Definição e opinião positiva	24,6%	59
Definição e opinião negativa	3,3%	8
Opinião positiva	17,1%	41
Opinião negativa	8,3%	20
Gostam quando aprendem	6,7%	16

Essa questão proposta para os alunos propiciou-nos reforçar que as lides cotidianas para o ensino da matemática podem ser mais proveitosas e eficazes, se se tornarem mais prazerosas. Desconsiderando a pertinência de tais conceituações, chamou-nos a atenção o fato de 41,7% dos interrogados se dedicarem a opinar positivamente sobre a matemática e apenas 11,6% se opinarem negativamente, o que nos mostra, em primeiro lugar, a ansiedade do aluno em registrar julgamento sobre sua prática e, em segundo lugar, uma porcentagem maior de respondentes que afirmam sua aceitação e o reconhecimento de sua importância. Nessa mesma coleta de dados, surpreendeu-nos a opinião de 6,7% dos respondentes de que gostam de matemática quando aprendem. É por meio desse dado que acreditamos ser pertinente pensar sobre a importância do uso da literatura e também de outras formas de expressão artística para melhorar o contato com a teoria e a prática da matemática e de sua compreensão teórica. O discurso matemático vem sendo elaborado com bastante pertinência pelos textos narrativos como no caso das obras de Malba Tahan, Apostolos Doxiadis, Simon Singh, Eli Maor, G. H. Hardy e outros que têm auxiliado adultos a compreenderem um pouco mais sobre essa área do saber e sobre aqueles que com ela lidam.

Pensamos a interdisciplinaridade como uma solução para o problema da fragmentação do conhecimento, da perda da visão de conjunto da realidade e como propulsora de resultados eficazes diante dos graves problemas de compartimentalização dos conteúdos, como é o que acontece no Ensino Fundamental. A matemática se desassocia dos outros saberes em que predominam as formas textuais verbais e passa a ser o espaço dos números, das fórmulas e dos sinais, um outro tipo de cifração da linguagem e da informação. Considerando informação enquanto inserção, a partir de sua origem *in forma* é adequado raciocinar que negar ao aluno a intermediação dos mecanismos de compreensão dessas diferentes linguagens seria impedir-lhe, de forma injusta e desonesta, o acesso ao conhecimento a que tem direito.

Por isso, não se pode desprezar que quando a apresentação textual antecede a sistematização das fórmulas e dos sinais, a compreensão dos significados dos eventos que geraram a formação do conhecimento matemático pode ser facilitada e melhorada e a literatura o faz de modo prazeroso. Nesse sentido, a interdisciplinaridade exerce um inestimável papel pela interrelação da literatura com a matemática. Cabe também ressaltar que o simples exercício da leitura é um eficaz catalizador do raciocínio e promove a capacitação necessária para que o aluno compreenda os enunciados dos problemas matemáticos.

É preciso reforçar que a formação das associações para um aprendiz consciente e interessado implica a retomada de conhecimentos prévios que vão contribuir para a produção de novos significados textuais. Quando não tem tais conhecimentos, o leitor cria associações limitadas, sente-se em desnível em relação ao texto e até o abandona por considerá-lo aborrecido e cansativo. Isso se dá frequentemente com a aprendizagem da Matemática. O fato de 6,7% dos alunos indagados responderem que gostam de matemática quando aprendem, num momento em que a pergunta era o que é a matemática, leva-nos a pensar que a angústia diante da não compreensão dos conteúdos dessa disciplina se deve ao desconhecimento, muitas vezes elementar, de informações históricas e processuais dos modos como se chegou à sistematização de regras, fórmulas, teorias e soluções, que estão frequentemente relacionados a necessidades humanas de explicar o mundo ao seu redor ou solucionar impasses ligados a sua relação com esse mundo, modos esses pré-requisitos extremamente importantes, de cujo conhecimento as narrativas podem dar conta com excelente qualidade e adequação. Sobre o rebuscamento da linguagem matemática, herança do grupo Bourbaki, bem comenta Geraldo Ávila⁹: "É importante observar que linguagem não motiva ninguém, idéias sim. Nenhum aluno pode se interessar por qualquer coisa onde não veja algum elemento que o satisfaça ou aguce a curiosidade". A intertextualidade e a interdisciplinaridade são instrumentos coerentes para se pensar o texto, seja ele matemático, literário, informático, visual ou auditivo, se tomarmos texto enquanto tecido de informações a serem lidas.

Textos menos apelativos do ponto de vista estético formal, por lidarem com um discurso oficial, supostamente factual ou cifrado como é o caso do discurso matemático, oferecem menos fruição ao leitor do que o texto literário que, nesse ponto, é muito mais sedutor, por lidar com o lúdico e propor um diálogo entre autor e leitor. Por isso, verdades, ensinamentos, sabedoria, conhecimento e ciência são intermediados por textos verbais, e de forma mais agradável e tranqüila do que por aqueles textos que envergam caráter

⁹Matemático brasileiro, ver [1].

informativo e teórico.

Esses aspectos que apontamos até agora servem para manter a discussão sobre o papel da literatura como elemento de unificação do diverso, do disperso e do fragmentado modo de lidar com o conhecimento. Para Weil, "a arte procura não só refletir em muitos aspectos a produção científica e tecnológica como também os materiais que são produtos de tecnologia científica".¹⁰ Baseados nisso, percebemos que a arte pode lidar efetivamente com aspectos do saber matemático, oferecendo-se como catalizadora de fronteiras e transmigradora de saberes, por ser ponte transgressora dessas mesmas fronteiras, aqui em particular, a arte literária.

Atualmente no Brasil existem numerosas e competentes opções literárias que, acreditamos, poderiam ser aproveitadas enquanto material de apoio didático no ensino da Matemática nos níveis fundamental e médio. Em boa parte delas, o autor faz uso da história da Matemática como mote da narrativa, provendo-a de maior contextualização.

É possível pensarmos que boa parte daquilo que os alunos não conseguem entender das atividades teóricas e práticas no cotidiano da sala de aula poderia ser melhor trabalhado por meio das narrativas, tanto aquelas meta-matemáticas, produzidas intencionalmente com esse objetivo, quanto aquelas que abordam sob a forma de curiosidades, folclores, poesias romances, anedotas, biografias, jogos e enigmas. A literatura constrói seu sentido à revelia do discurso oficializado como científico, factual ou referencial e, nesse espaço esteticamente criado, ela, sem nenhum entrave, interlocuta com os demais saberes. Se Freud pode ser considerado um bom leitor dos textos literários, também um bom escritor, antes mesmo de ser um cientista, foi ainda aquele que criou uma ciência cujo mote do discurso tem, muitas das vezes, a construção dos modos de ser e de comportar humanos arquivados e observados nas narrativas míticas primitivas e em textos literários. Vemos a literatura como uma espécie de pensamento elevado, dado seu grau de simulação de mundos e de interferência nos modos de ser e de pensar humanos. Sendo uma das mais antigas práticas culturais, principalmente pelo ato de narrar, de forma oral, escrita, por meio de encenações e de desenhos e pinturas deixadas pelos povos primitivos e remotos, constitui-se como instrumento de arquivo de história e memória, ao mesmo tempo em que reflete sobre o humano e não raro tem sido usada como forma de ensinamento nas várias modalidades do saber, por meio da representação do mundo. Por isso, sua capacidade de dialogar sem atropelos com a matemática oferece-se como espaço para a melhoria da qualidade da aceitação desse saber por jovens e adolescentes. Não queremos dizer que toda a matemática possa ser ensi-

¹⁰Veja [14].

nada por meio da literatura, dado o grau de abstração a que algumas teorias matemáticas alcançam. Citando [10] ¹¹, “os conceitos científicos expressos em forma matemática dão uma imagem do mundo que não pode mais ser transmitida mediante uma estrutura verbal. Há um rompimento com a linguagem do senso comum.” A literatura diminui o abismo da passagem da linguagem simbólica-matemática para a verbal. Cremos, sobretudo, que a leitura de obras metamatemáticas pode contribuir para uma formação mais sólida do profissional de educação e, conseqüentemente, dos pequenos aprendizes. Isso viabilizaria a esses profissionais a prática da indicação e discussão de obras metamatemáticas para as crianças, com contribuições proveitosas para a integralização dos saberes e para a formação integral do pensamento humano.

Referências

- [1] ÁVILA, Geraldo. O Ensino da Matemática, Revista do Professor de Matemática, nº 23, SBM, 1993.
- [2] CHANGEUX, Jean-Pierre; CONNÈS, Alain. Matéria e Pensamento. Trad. Luiz Paulo Rouanet. São Paulo: UNESP, 1996.
- [3] DOMINGUES, Ivan (org). Conhecimento e transdisciplinaridade. Belo Horizonte: Editora UFMG/IEAT/UFMG, 2001.
- [4] DOXIADIS, Apostolos. Tio Petros e a Conjectura de Goldbach . Trad. Cristiane Gomes de Riba. São Paulo: Ed. 34, 2001.
- [5] GALILEU. Maio, 1999, Ano 8, Nº 94.
- [6] GUEDJ, Denis. O Teorema do Papagaio. São Paulo: Companhia das Letras, 1999.
- [7] HARDY, G. H.. Em Defesa de um Matemático. São Paulo: Martins Fontes, 2000.
- [8] LOBATO, Monteiro. Aritmética da Emília . 29ª ed. Brasília: Brasiliense, 1997.
- [9] MAOR, Eli. e: A História de um Número. Rio de Janeiro: Record, 2003.

¹¹Pág. 10 .

- [10] MORA, Ana María Sánchez. **A Divulgação da Ciência como Literatura** . Rio de Janeiro: Casa da Ciência/ Centro Cultural de Ciência e Tecnologia da UFRJ, Ed. UFRJ, 2003.
- [11] SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat** . Trad. Jorge Luiz Calife. Rio de Janeiro: Record, 1999.
- [12] **O Livro dos Códigos**. Trad. de Jorge calife. Rio de Janeiro: Record,2001.
- [13] TAHAN, Malba. **O Homem que Calculava** . 55ª ed. São Paulo/Rio de Janeiro: Record, 2001.
- [14] WEIL, Pierre et. alli. **Rumo a Nova Transdisciplinaridade: Sistemas Abertos de Conhecimento**. São Paulo: Summus, 1993.

Contando a História da Contagem

Cláudia Tavares e Frederico Reis Marques de Brito ¹²

Resumo

Nosso objetivo nesse artigo é descrever, de forma breve, o desenvolvimento da Análise Combinatória, do *Stomachion* aos modernos problemas da Teoria dos Grafos.

“Era uma vez um matemático chamado Pascal que ficou famoso quando inventou um triângulo formado por números, o Triângulo de Pascal, e deu assim o pontapé inicial para a Análise Combinatória.”

Essa história bem que poderia estar num livro de fábulas de La Fontaine. Explicamos: apesar de difundida, ela não corresponde fidedignamente aos fatos ocorridos. Primeiro, Pascal, ou melhor dizendo o matemático francês Blaise Pascal (1623 - 1662) notorizou-se não só pelo triângulo que leva seu nome mas por diversas contribuições valiosas à Matemática e à Ciência, em geral. Só para citar algumas, aos quatorze anos escreveu um tratado sobre as seções cônicas, aos dezoito inventou a calculadora, três anos depois formulou um resultado físico que hoje conhecemos como Princípio de Pascal que diz que a pressão aplicada a um fluido dentro de um recipiente fechado é transmitida, sem variação, a todas as partes do fluido, bem como às paredes do recipiente. Mais tarde ajudou a fundar uma nova área da Matemática, a Probabilidade e foi também o primeiro a pensar em um sistema de ônibus e organizar uma companhia de transporte público. Segundo, o triângulo de Pascal já era conhecido pelo árabe Al-Kajari, no século XI e pelo chinês Chu Shī-kié que nos deixou a mais antiga apresentação preservada do triângulo, datada de 1303. Em 1653, Pascal escreveu o seu “*Traité du Triangle Arithmétique*” e o publicou dois anos mais tarde. Nele encontramos o triângulo numérico, construído de uma forma diferente da que habitualmente usamos hoje: À partir da segunda linha, cada elemento é obtido como soma dos elementos da linha anterior situados à esquerda ou exatamente acima do elemento:

¹²Professores do departamento de Matemática da FAFISETE -FEMM - Sete Lagoas , bacharéis e mestres em Matemática pela UFMG.

1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	...
1	3	6	10	15	...
1	4	10	20	35	...
1	5	15	35	70	...
.	.	.	.	.	...

Por exemplo, $20 = 10 + 6 + 3 + 1$. O triângulo é obtido desenhando-se uma diagonal qualquer no arranjo numérico acima.

E terceiro, recentemente descobriu-se que o estudo de combinatória remonta a antiguidade clássica, mais precisamente ao tempo do grande Arquimedes (287 a.C - 212 a.C). Dentre os trabalhos publicados por este que, juntamente com Newton e Gauss, forma a tríade dos maiores matemáticos de todos os tempos, encontra-se um que sempre aguçou a curiosidade de matemáticos e historiadores. Trata-se do *Stomachion*, aparentemente um jogo, semelhante ao conhecido *Tangram*, constituído de quatorze peças que devem ser encaixadas para formar um quadrado.

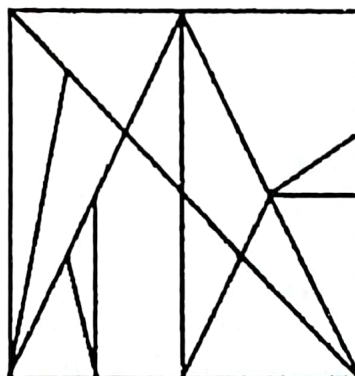


Figura 1: Stomachion

O motivo de tanta curiosidade acerca de um simples jogo era exatamente esse, como pôde um simples jogo ter despertado a atenção de uma das mais brilhantes mentes da história? Bem, segundo o matemático Leibniz (um dos fundadores do cálculo diferencial), “ Não há homens mais inteligentes do que aqueles que são capazes de inventar jogos”. E, para surpresa de todos, em dezembro de 2003, o jornal americano “The New York Times” publicou um artigo intitulado “In Archimedes Puzzle, a New Eureka Moment”, sobre os resultados da pesquisa do historiador de Matemática Reviel Netz, da Universidade de Stanford, Califórnia, em que ele afirma que o Stomachion não era um mero passatempo, mas um objeto executado por Arquimedes para

lins de Análise Combinatória. Mais especificamente, a conclusão de Netz é que Arquimedes desejava determinar de quantas formas distintas poderiam ser encaixadas as 14 peças para formar o quadrado. A resposta recentemente provada dessa questão pode ser 17.152 ou, desprezando-se as soluções simétricas, 268, o que nos parece mais razoável e, não se sabe ao certo se o próprio Arquimedes obteve essa resposta. De qualquer forma, o fato fundamental é que a origem da Análise Combinatória não se encontra no estudo do binômio de Newton, como acreditava-se, mas mais uma vez remonta à genialidade de um homem que sempre esteve à frente de seu tempo, Arquimedes.

Dando um grande salto no tempo, voltemos ao binômio $(a + 1)^n$. Como sabemos, ele está diretamente relacionado ao triângulo de Pascal. Em um tratado publicado em 1654, Pascal mostrou como utilizá-los para achar os coeficientes do desenvolvimento de $(a + b)^n$. A grande contribuição do inglês Isaac Newton (1646 - 1727) ao binômio foi ter mostrado, numa carta a Oldenburg, em junho de 1676, como calcular $(a + 1)^n$, diretamente, isto é, sem ter que recorrer a $(a + 1)^{n-1}$ e ter generalizado esse resultado para $(a + b)^q$, em que $q = \frac{m}{n}$ pode ser agora um número racional:

$$(P + PQ)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}AQ + \frac{m-n}{2n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \dots,$$

como escreveu o próprio Newton.¹³ A Fórmula obtida para a sua expansão é usualmente conhecida como Binômio de Newton devido à sua grande contribuição.

Um grande desenvolvimento da Análise Combinatória ocorreu devido aos problemas originados com os jogos de azar. Já na Divina Comédia, de Dante Allighieri (1265-1321), há uma referência a problemas de jogos de dados. Os jogadores queriam achar maneiras seguras de ganhar em jogos de cartas, dados ou moedas. Entre eles podemos citar o cavaleiro De Meré, um homem que ficou na história como escritor. De Meré discutia com Pascal problemas relativos a probabilidade de ganhar em certos jogos de cartas e dados. Um dos problemas era saber qual o número mínimo de vezes necessário para que se obtenha um "doble seis" (6+6) no lançamento de 2 dados um certo número de vezes. Pascal correspondeu-se com Pierre de Fermat (1623-1662) sobre o que hoje chamaríamos de probabilidades finitas. Estava nascendo então a teoria das probabilidades, terreno fértil para o desenvolvimento de novas técnicas da Análise Combinatória. Outros grandes matemáticos como Galileu (1564-1642), Jaime Bernóulli (1654-1705), Euler (1710 - 1761) e Laplace (1749-1827) se interessaram pelo assunto e contribuíram grandemente para seu desenvolvimento.

¹³Ver [1], vol II, pág 61.

O genial Leonard Euler, já citado, teve um papel destacado. O símbolo $\binom{n}{p}$, representando o que hoje conhecemos por $\frac{n!}{p!(n-p)!}$, o coeficiente binomial. Foi ele o fundador da teoria das partições. Uma partição de um inteiro positivo n é uma coleção de inteiros positivos cuja soma é n . Por exemplo, o número $n = 3$ tem exatamente três partições:

$$1 + 1 + 1$$

$$1 + 2$$

$$3$$

Consta que o matemático francês Phillipe Naudé enviou uma carta a Euler, em que questionava sobre “de quantas formas é possível escrever um número inteiro como soma de inteiros positivos”, ao que Euler teria prontamente respondido com a então batizada pelo próprio Euler, “*partitio numerorum*”. O problema de se determinar o número $p(n)$ de partições de um inteiro positivo n foi objeto de estudos durante um longo tempo, e uma fórmula para seu cálculo só apareceu no século XX, fruto do trabalho de G. H. Hardy, S. Ramanujan e H. Rademacher. Por exemplo: $p(4) = 5$ e $p(5) = 7$, como o leitor poderá verificar sem dificuldade. Mais tarde, em 1736, Euler resolveu um problema que intrigava os matemáticos de sua época. Na prússia, região leste da Alemanha, havia uma cidade chamada Königsberg famosa por suas sete pontes, cinco das quais ligavam o continente a uma ilha. O problema consistia em saber se era possível dar uma volta pela cidade passando uma e somente uma vez por cada ponte, o que Euler provou ter resposta negativa. Estava dado um dos pontapés iniciais para a Teoria dos Grafos, fundada por Euler, G. Kirchhoff e A. Cayley.

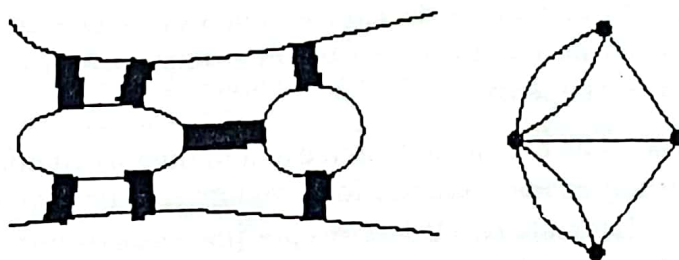


Figura 2: Problema das Pontes de Königsberg

Outro problema interessante na Análise Combinatória que envolve Teoria de Grafos é o Problema das Quatro Cores cuja interpretação é acessível a qualquer pessoa, mesmo que não tenha conhecimentos matemáticos. Simplesmente consiste em determinar quantas cores serão necessárias para colorir

um mapa de maneira que países adjacentes não tenham a mesma cor. Esta questão surgiu em 1852 quando Francis Guthrie tentava colorir um mapa da Inglaterra. Guthrie, que foi advogado, botânico e, sobretudo, matemático, tinha um irmão mais novo, Frederick Guthrie, que era aluno de Augustus De Morgan (o De Morgan das conhecidas leis de De Morgan, na Lógica) para o qual apresentou a conjectura. Mas apenas em 1976, com a ajuda de um computador IBM360, Kenneth Appel e Wolfgang Haken resolveram o problema de forma definitiva e completa. Outros matemáticos como Birkhoff e Heesch contribuíram com idéias que ajudaram no sucesso da demonstração, que tem importância histórica porque constituiu a primeira demonstração matemática feita com a ajuda de um computador.

No ano de 1834, o alemão Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859) formulou o princípio das gavetas, pelo qual,

Teorema 5. *Se m objetos são colocados em n gavetas, com $m > n$, então ao menos uma gaveta contém $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ objetos.*¹⁴

Esse princípio aparentemente ingênuo é um dos recursos mais utilizados para resolver problemas de combinatória (e não raro surge em outras áreas da matemática). Citamos aqui um curioso exemplo, que poderia ser chamado de "Teorema do Cabeleireiro".

Exemplo 1. *Numa cidade com mais de 2 milhões de habitantes existem mais de dez com a mesma quantidade de fios de cabelo.*

Demonstração : Esse fato é verdadeiro levando-se em conta o fato de que nenhum ser humano chega a ter 200.000 fios de cabelo, pois para tanto as dimensões da cabeça do indivíduo teriam que ser descomunais... Assim, se criarmos 200.000 gavetas, numeradas de 0 a 199.999 e colocarmos em cada gaveta os moradores da cidade com tantos fios de cabelo quanto o número indicado na gaveta, então teremos uma gaveta com pelo menos $\lfloor \frac{2.000.000-1}{200.000} \rfloor + 1 = 11$ pessoas. ■

Dirichlet nasceu na cidade de Duren e sua família é oriunda de *Richelet*, o que explica seu sobrenome. Johann foi aluno de ninguém menos que Gauss, o Príncipe dos Matemáticos. Conta-se que por ocasião dos cinquenta anos de doutorado de Gauss, houve uma celebração e, o ponto alto da festa seria quando Gauss acenderia seu cachimbo usando, para tanto, parte dos originais das *Disquisitiones Arithmeticae*, sua obra-prima. Vendo a cena, Dirichlet não pôde se conter, avançou sobre Gauss, tomou-lhe das mãos os originais e guardou-os para si, justificando que a queima das *Disquisitiones* seria, no

¹⁴ $\lfloor a \rfloor$ representa a parte inteira de a , isto é, o maior número inteiro menor ou igual a a . Por exemplo: $\lfloor 7,01 \rfloor = 7$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$.

mínimo, um grande sacrilégio. Com a morte de Gauss, Dirichlet foi indicado a sucedê-lo na universidade de Göttingen, onde trabalhou até a morte. Curiosamente, após sua morte, seu cérebro foi retirado e até hoje encontra-se guardado, assim como o de seu mestre Gauss, no departamento de fisiologia da Universidade de Göttingen. Isso é o que se pode chamar de inteligência conservada...

A Análise Combinatória atualmente continua a crescer, principalmente na computação. Os pesquisadores desta área podem tratar problemas que são difíceis de resolver por métodos analíticos mas que podem ser simulados em computadores potentes que levam a obter elementos que ajudem à sua compreensão e levam a formulação de conjecturas, senão mesmo à sua resolução. Abaixo estão alguns problemas interessantes que perturbaram mentes importantes e que deixamos como desafio para o leitor.

Exercício 4. *Mostre que se nós tomarmos 10 pontos do interior de um triângulo equilátero, de lado 3, pelo menos dois pontos ficarão a uma distância menor que 1 um do outro.*

Exercício 5. *Provar que todo inteiro positivo pode ser expresso de maneira única como soma de potências distintas de 2.*

Exercício 6. *Com três dados, o número 9 e o número 10 podem ser obtidos de seis maneiras distintas, cada um deles. No entanto a experiência mostra que 10 é obtido mais frequentemente que o 9. Explique este fato.*

Exercício 7. *Problema de Steiner: dados n objetos, podemos agrupá-los num conjunto de ternos de tal modo que cada par de objetos apareça uma e uma só vez em cada terno? (este problema tem solução apenas para certos valores de n)*

Exercício 8. *Problema do viajante: dados n pontos no plano ou no espaço, como uni-los de modo que o caminho total seja o mais curto possível?*

Exercício 9. *Problema do empacotamento: dado um conjunto de objetos de diversos volumes, como dispô-los no menor número de caixas de um volume dado?*

Exercício 10. *Em Abril de 1975, Martin Gardner (1914-) apresentou um mapa, com 110 regiões e dizia que, para aquele exemplo, seriam necessárias cinco cores. Seria assim um contra-exemplo, colocando em dúvida o Teorema das Quatro Cores. Este ato não passou de uma brincadeira realizada no "Dia das Mentiras". Tente também colorir este pretensso contra-exemplo de Martin Gardner.*

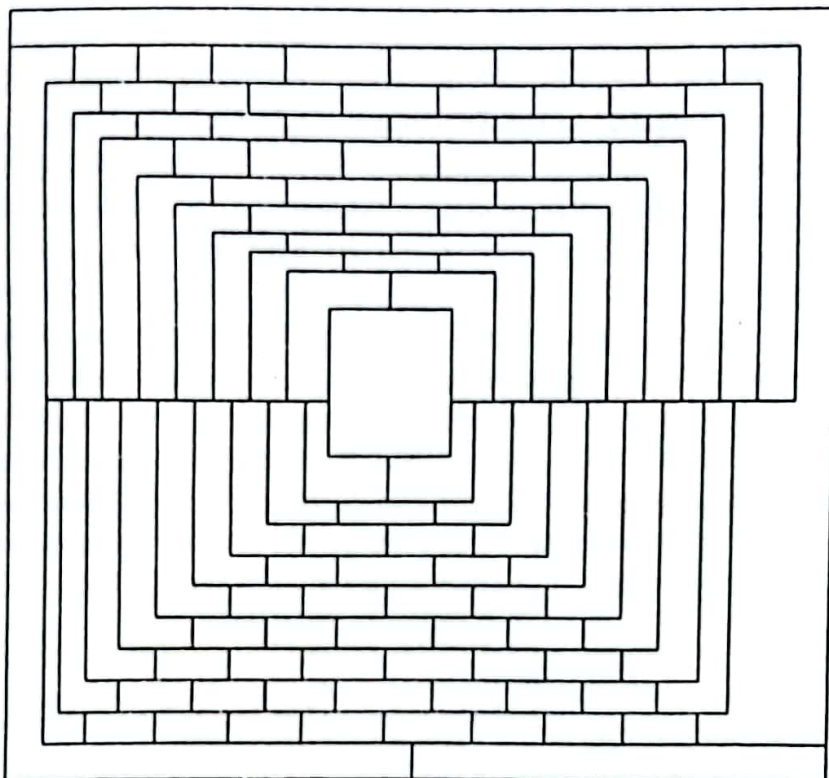


Figura 3: Exercício 7

Referências

- [1] CAJORI, Florian, A History of Mathematical Notations .Mineola: Dover, 1993.
- [2] LIMA, Elon Lages, Matemática e Ensino . Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- [3] MORGADO, Augusto C. de Oliveira, CARVALHO, João Bosco Pitombeira, CARVALHO, Paulo Cezar P. , FERNANDEZ , Pedro, Análise Combinatória e Probabilidade. Rio de Janeiro: SBM,2000.
- [4] EVES, Howard , Introdução á História da Matemática, 3ª ed. . Campinas: Ed. UNICAMP, 2002.

Um Terrível Impasse Matemático entre Telemar, Cemig e Copasa

Frederico Reis Marques de Brito ¹⁵

Ricardo Saldanha de Moraes ¹⁶

José Sérgio Domingues ¹⁷

O senhor Euclides acaba de comprar um grande terreno, numa região perfeitamente plana, onde construiu três casas. Sujeito afisionado pela geometria plana, fez uma estranha exigência: quer que sejam ligadas água, luz e telefone a suas três casas, com todas as ligações no plano das casas e sem que as ligações se cortem. Tal exigência deixou em pânico os técnicos responsáveis pelas ligações. Todas as tentativas esboçadas falhavam. Foi preciso então recorrer à uma tal *Fórmula de Euler*. Mas afinal, que fórmula é essa? Quem é esse tal Euler? E, principalmente, como foi resolvido o problema do sr. Euclides?

O suíço Leonard Euler (1707 - 1783) foi provavelmente o mais importante matemático de seu tempo e dificilmente se encontrará uma área da Matemática que não tenha sido influenciada por ele. Basta dizer que são devidas a Euler algumas das notações mais comuns da Matemática, tais como: $f(x)$ para representar uma função, s para o semi-perímetro de um triângulo, a, b, c para as medidas dos lados do triângulo ABC , i para representar a unidade imaginária dos complexos ($i = \sqrt{-1}$) e Σ para representar o somatório. Além disso é devida a ele a fórmula mais bonita da Matemática, que associa os números mais importantes da mesma:

$$e^{\pi i} + 1 = 0 .$$

Um reconhecimento à sua inteligência incomum lhe foi dado pelo físico François Arago (1786 - 1853): "Euler calculava sem nenhum esforço aparente,

¹⁵Professor do depto de Matemática da FAFISETE, bacharel e mestre em Matemática pela UFMG, doutorando pela UNICAMP.

¹⁶Professor do depto de Matemática da FAFISETE, bacharel e mestre em Matemática pela UFMG.

¹⁷Aluno do 8º período do curso de Matemática (Licenciatura) da FAFISETE.

assim como os homens respiram e as águias se mantêm suspensas no ar."

Mas a tal Fórmula de Euler, usada para resolver o problema do sr. Euclides, é outra:

$$V - A + R = 2. \quad (5)$$

Para entendermos essa fórmula, precisamos antes da seguinte:

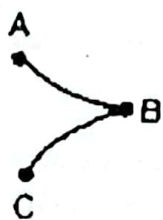
Definição 1. Um grafo plano é um certo número de pontos no plano, chamados de **vértices** e um número de arcos, chamados de **arestas**, de forma que:

- (i) as extremidades de cada aresta são vértices do grafo;
- (ii) duas arestas distintas que se interceptem só podem se interceptar nas extremidades.

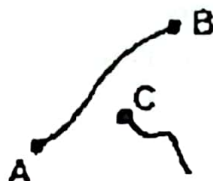
Por exemplo, as figuras I e II são grafos, mas as representadas em III e IV não.



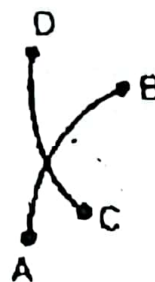
II



III



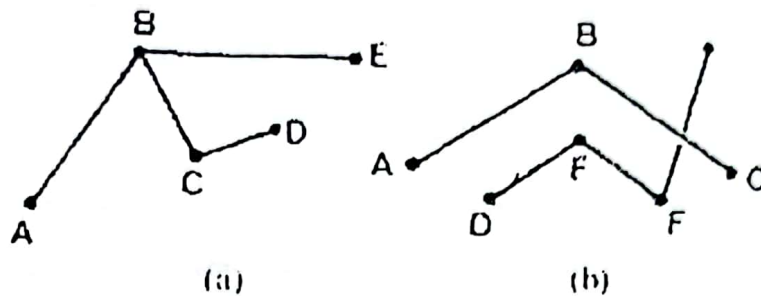
IV



Na fórmula (5), V é o número de vértices, A o de arestas e R o de regiões planas determinadas pelo grafo. Entretanto, para essa fórmula ser verdadeira é necessário que o grafo seja **conexo**.

Definição 2. Um grafo plano é **conexo** se dados dois vértices A e B do grafo, existir um caminho ligando A a B , isto é, se existirem vértices $V_1, V_2, \dots, V_k$ e arestas $AV_1, V_1V_2, \dots, V_kB$, unindo A a B .

Por exemplo, o grafo da figura (a) é conexo, enquanto o da figura (b) não:



Agora podemos voltar à questão das ligações. Em que medida essa fórmula sobre grafos poderia ajudar? Na realidade, ela apenas acabou com o sofrimento dos técnicos envolvidos, mas não resolveu o problema do sr. Euclides: Supondo possível fazer o projeto conforme o sr. Euclides queria e pensando cada casa e cada companhia (luz, água e telefone) como vértices e as ligações como arestas, temos um grafo. Ao aplicarmos a fórmula de Euler, eis a surpresa: a igualdade obtida é falsa. Como a fórmula é verdadeira, conclui-se que não é possível fazer as ligações na forma proposta. É a matemática resolvendo um impasse entre três grandes companhias.

Referências

- [1] EVES, Howard , **Introdução à História da Matemática**, 3ª ed. . Campinas: Ed. UNICAMP, 2002.
- [2] LIMA, Elon Lages. **Matemática e Ensino** . Rio de Janeiro: SBM, 2002.
- [3] PITOMBEIRA, João Bosco, **O Problema das Ligações de Água, Luz e Telefone - Uma aplicação da fórmula de Euler** , Revista do Professor de Matemática, nº 11, SBM.

Problemas Curiosos e Loterias

Jorge Sabatucci¹⁸

Definição 3. A probabilidade de ocorrer um evento é dada por

$$\frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}.$$

Problema 1 (Lançamento de dois dados). Lançando-se dois dados qual é a probabilidade de sair a soma 8?

Solução: Os resultados possíveis são:

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

São cinco resultados favoráveis (soma 8) e 36 casos possíveis (somas possíveis). Assim, a probabilidade de sair uma soma 8 é $\frac{5}{36}$, aproximadamente 13,88%.

Problema 2 (MEGA-SENA). O jogo da MEGA-SENA. O apostador pode marcar de 6 a 10 números no cartão abaixo. Sorteiam-se seis números distintos. Ganha o prêmio da Mega-Sena o apostador que acertar os seis números sorteados.

O apostador ainda ganha prêmios se acertar cinco números (quina) ou quatro números (quadra).

O apostador pode marcar de 6 a 10 números no cartão. Veja a tabela de preços, em 10 de setembro de 2004,

A aposta mínima de 6 números custa R\$1,50, veja a tabela.

Questões:

¹⁸Mestre em Matemática pela UFMG, professor adjunto do departamento de Matemática da UFMG

01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60

Figura 4: Cartão da mega-sena

Quantidade de números marcados	6	7	8	9	10
Valor a ser pago	R\$1,50	R\$10,50	R\$42,00	R\$126,00	R\$315,00

1. Justifique os preços das demais apostas.
2. Com uma aposta mínima qual é a probabilidade de acertar a Mega-Sena? Acertar uma quina? Acertar uma quadra?
3. Marcando-se 8 números qual é a probabilidade de acertar a Mega-Sena? A quina? A quadra?

Solução:

1. O preço de N apostas é dado por $\binom{N}{6} \times 1,50$. Isso porque O preço de N apostas é dado por $\binom{N}{6}$ corresponde ao número de apostas mínimas, pela qual paga-se R\$1,50. Ou ainda, ao marcar N números a probabilidade do apostador fica $\binom{N}{6}$ maior, por isso o preço é calculado como anteriormente.
2. Aposta mínima: $\frac{1}{\binom{60}{6}}$, que é da ordem de 0,0000020%.

Quinas:

$$\frac{\binom{6}{5} \times \binom{54}{1}}{\binom{60}{6}},$$

que é da ordem de 0,00066%;

Quadras:

$$\frac{\binom{6}{4} \times \binom{54}{2}}{\binom{60}{6}},$$

que é da ordem de 0,42%.

3. Acertar a Mega-Sena:

$$\frac{\binom{8}{6}}{\binom{60}{6}} \gg 0,00056\%.$$

Quinas:

$$\frac{\binom{8}{5} \times \binom{52}{1}}{\binom{60}{6}},$$

que é da ordem de 0,0058%;

Quadras:

$$\frac{\binom{8}{4} \times \binom{52}{2}}{\binom{60}{6}},$$

que é da ordem de 0,18%.

Problema 3 (Retiradas de bolas de uma urna). *De uma urna que contém n bolas retiram-se um punhado delas. Qual é a probabilidade de se extrair um número par de bolas?*

Solução:

O número de extrações de 1 bola é dado por $\binom{n}{1}$; de 2 bolas é dado por $\binom{n}{2}$; etc.. Dessa forma o número p de casos possíveis é dado por $p = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$. O número de casos f favoráveis é dado por $f = \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots$. A probabilidade pedida é $\frac{f}{p}$.

Calculando a probabilidade de forma explícita:

Temos que $(1 + 1)^n = 1 + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$, daí $2^n = 1 + p$.

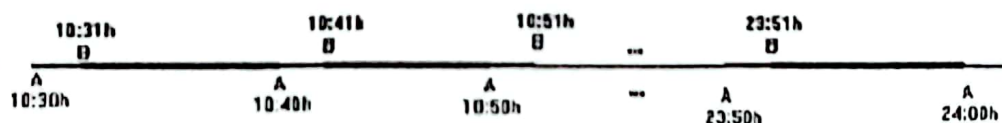
Adicionando a primeira expressão à expressão $(1 - 1)^n = 1 - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + (-1)^n \binom{n}{n}$, temos $2^n = 2 \left\{ 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots \right\} = 2 \{1 + f\}$.

De $2^n = 1 + p$ e $2n = 2 \{1 + f\}$ obtemos $f = 2^{n-1} - 1$ e $p = 2^n - 1$. Assim, a probabilidade pedida pode ser escrita como $\frac{2^{n-1}-1}{2^n-1}$.

Problema 4 (Duas linhas de ônibus). *Considere duas linhas de ônibus A e B. O primeiro ônibus da linha A sai às 10:30h e o primeiro da linha B sai às 10:31h, ambos partindo do mesmo ponto. A partir daí, de cada linha, sai um ônibus a cada 10min. Chegando ao ponto, compare as probabilidades de tomar em primeiro lugar um ônibus da linha A ou da linha B.*

Solução:

As pessoas que chegam nos intervalos de tempo na cor preta tomam em primeiro lugar um ônibus da linha B, enquanto os que chegam nos intervalos correspondentes à cor vermelha tomam em primeiro lugar um ônibus da linha A.



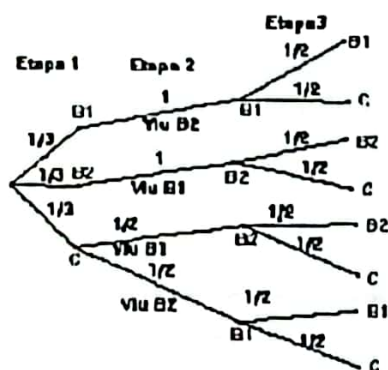
Observe que de 10 em 10min uma pessoa pode tomar em primeiro lugar um ônibus da linha B (intervalo preto de comprimento 1) ou em primeiro lugar um da linha A (intervalo vermelho de comprimento 9). Assim, a probabilidade de pegar em primeiro lugar um ônibus da linha A é 9 vezes a de pegar em primeiro lugar um ônibus da linha B.

Problema 5 (Escolhendo entre bodes e carros). *Em um programa de televisão, o candidato é solicitado a escolher uma entre três portas fechadas. Atrás de uma delas há um carro e atrás das outras duas há um bode. Depois de o candidato ter escolhido a porta desejada, mas antes de abri-la, o animador do programa, que sabe onde estão os bodes, abre uma das portas que não foram escolhidas e mostra que há um bode atrás dela. Então, o candidato está com a mão na maçaneta de uma porta fechada e há outra porta aberta. Nesse momento o animador do programa pergunta ao candidato se ele deseja trocar a porta que ele havia escolhido pela outra porta que ainda está fechada. Se o candidato tenta maximizar sua probabilidade de ganhar o carro, ele deve trocar de porta, permanecer na que escolheu ou isso é indiferente?*

Solução:

Observe que temos três etapas nesse problema: **primeira**, a escolha de uma entre as três portas; **segunda**, um dos bodes é exibido pelo animador; e a **terceira**, a segunda escolha do candidato.

Sejam B1 e B2 os bodes e C o carro. Na **primeira etapa** a probabilidade de escolher cada porta é de $1/3$. Na **segunda**: se a mão está em B1 é porque ele viu o bode B2. Então ou permanece em B1 ou vai para o carro; se a mão está em B2 é porque ele viu o bode B1. Então ele fica em B2 ou vai para o carro; e se a mão está no carro ele pode ver o bode B1 ou B2. Ele então vê B2 e escolhe troca para B1 ou permanece no carro ou vê B1 e, aí troca para B2 ou permanece no carro. Vamos representar isso na árvore das possibilidades:



Observações:

1. A probabilidade inicial de ganhar o carro é $1/3$ e depois de ver o bode é $1/2$;
2. A probabilidade de o candidato ganhar trocando de portas é $1/6 + 1/6 = 2/6$;
3. A probabilidade de o candidato ganhar sem trocar a porta é $1/12 + 1/12 = 1/6$.
4. De 2 e 3, verificamos que a probabilidade de ganhar o carro trocando de porta, na segunda escolha (terceira etapa) é o dobro da probabilidade de ele ganhar sem trocar.

Referências

- [1] MORGADO, A. C. e outros, **Análise Combinatória e Probabilidade**, Coleção do Professor de Matemática - SBM.
- [2] SANTOS, J. O. e outros, **Introdução à Análise Combinatória**, Editora da UNICAMP.
- [3] HAZZAN, S, **Análise Combinatória**, Coleção Fundamentos de Matemática Elementar:Volume 5. Atual Editora, 1977.
- [4] SABATUCCI, Jorge, **Análise Combinatória**, Texto usado na capacitação de professores do Estado de Minas Gerais.
- [5] Revista do Professor de Matemática(RPM), Sociedade Brasileira de Matemática(SBM).

Aprendizagem Significativa: modelo cognitivo para mudanças conceituais

Paulo Henrique Dias Menezes¹⁹

Lúcia Maria Batista²⁰

Aroldo Luiz Bertoldo²¹

Resumo

Neste trabalho apresentamos um modelo de ensino para mudança cognitiva, desenvolvido pelo Prof. Dr. João Filocre Saraiva, baseado nas três etapas piagetianas de construção de conhecimentos, denominadas: INTRA, INTER e TRANS. Baseados nesse modelo, propomos um modo de organização dos conteúdos curriculares, de forma que o entendimento dos conceitos ocorra de forma sistêmica e progressiva, permitindo ao aluno construir o seu próprio conhecimento.

Introdução

Para começar vamos estabelecer uma reflexão acerca da natureza da Ciência, do papel do especialista e do conhecimento científico. O nosso objetivo com isso, é contribuir para uma análise mais aprofundada sobre a freqüente mitificação da Ciência e as conseqüências dessa mitificação na formação do aluno.

A visão mitificadora da Ciência, leva à perda de sua dimensão como atividade humana, aprendida e ensinada, praticada por pessoas comuns, que possuem virtudes e defeitos. Nessa perspectiva, cientistas e especialistas são tidos como seres dotados de capacidades especiais, que necessitam, para o exercício de sua profissão, de formação e competências específicas que não são acessíveis a todos. No entanto, a ciência é uma atividade humana, coletiva e compartilhada, cujo objetivo é encontrar soluções para os problemas da

¹⁹Professor do depto de Matemática da FAFISETE [paulomenezes@unisete.br]

²⁰Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Sete Lagoas [luciamb@gdлк.com.br]

²¹Universidade Estadual de Minas Gerais [parsiul@ig.com.br]

sociedade, propiciando aos indivíduos a oportunidade de um desenvolvimento pessoal e social por meio do estabelecimento de relações equilibradas com a realidade.

Muitas vezes, as competências específicas necessárias a um especialista, são confundidas com um "dom", que é entendido como graça divina, significando que não houve demanda de esforço para construção dessas competências e que há uma predestinação do indivíduo no desempenho de suas habilidades. Essa atribuição do "dom" a um único indivíduo acaba caracterizando-o como "gênio" e o trabalho científico como um processo pontual e individual, esquecendo-se de suas dimensões humana e coletiva. Esse é um dos fatores que auxilia na formação dessa visão mítica da ciência.

Na visão popular o cientista é um homem íntegro, honesto, imparcial e preocupado com o desenvolvimento de todos. Nos comerciais de TV, os "homens de jaleco branco" conferem credibilidade e validade a uma série de produtos. No entanto, o cientista é um profissional como outro qualquer, dotado de virtudes e defeitos, passível de influências políticas, sociais e culturais. Qualidades como a honestidade e a integridade são desejáveis a todos cidadãos. Por outro lado, a criatividade, a imaginação, a persistência e a competência, mesmo não sendo exclusivas, são qualidades indispensáveis a todo cientista na execução de seu trabalho. Além disso, um cientista precisa ser dotado de uma certa autonomia intelectual, no sentido de ter condições de defender seus pontos de vista e, ao mesmo tempo, respeitar e entender o ponto de vista dos outros.

Outro mito relacionado à Ciência é a idéia de que nela está depositada uma verdade absoluta e inquestionável, como se houvesse uma única forma de ver e entender o mundo. Entretanto, a "verdade" que ela revela é apenas um dos caminhos de interpretação do mundo. A ciência, como qualquer outra atividade humana, orienta-se por diversos interesses para atingir objetivos variados, o que é uma verdade absoluta hoje, pode não passar de um grande equívoco amanhã.

Na busca de soluções para os diversos problemas formulados pela sociedade, deve haver um relacionamento com a Ciência, de tal forma, que permita uma sintonia dos anseios de ambas as partes. Deste modo, ao buscar o conhecimento, a ciência contribui para formação do cidadão, favorecendo, dentre outros fatores, seu processo de autoconhecimento. O conhecimento acumulado hoje, resultado de um esforço coletivo de várias gerações, não existe e não se sustenta por si só. Ele é construído na interação do sujeito com a realidade, adquirindo valor na medida em que contribui como instrumento de ação transformadora do mundo. Para melhor embasar essas idéias, torna-se necessário, também, uma análise dos pressupostos psicológicos/pedagógicos, envolvidos no processo ensino aprendizagem.

Um dos principais fatores que se discute no meio educacional é a forma como o indivíduo aprende. Uma idéia, que perdurou por muito tempo, é a que concebe o aprendiz como um sujeito, cujo mundo interior, é povoado por “coisas” que entraram em sua mente através dos sentidos. Tal idéia, de cunho empirista, tende a enfocar o conhecimento como aquilo que tenha relação com os sentidos, os quais, por sua vez, funcionariam como uma “porta de entrada” dessas idéias. O aprendiz estaria desse modo, relegado à condição de mero depositário de conhecimentos, para os quais não contribui com seu esforço pessoal, submetendo-se às “forças externas”, que terminam por moldá-lo segundo a vontade de quem ensina. Nessa concepção, o “método”, infalível e inatacável, torna-se o instrumento maior de controle, capaz de conduzir qualquer um à aprendizagem efetiva. Em oposição a essa concepção empirista do processo de aprendizagem, tem-se a visão interacionista, segundo a qual o aprendiz é aquilo que sua interação com o mundo lhe possibilita.

Nesta concepção, o sujeito é feito de dentro para fora, portanto, o conhecimento que ele adquire, não é sempre consciente, o que torna impossível estabelecer um método de ensino que seja totalmente eficaz. Assim, o controle externo sobre a aprendizagem, torna-se praticamente impossível, pois ela ocorre por meio de processos e não pela eficiência do método. Dessa forma, o sujeito estrutura-se ao interagir com o mundo e estrutura o mundo ao atuar sobre ele. De acordo com essa visão, não haveria um método, mas vários métodos diferentes, para indivíduos que também são diferentes. Nessa concepção, o aluno é entendido como sujeito, capaz de re-elaborar idéias a partir de seu esforço pessoal por meio de suas interações com o mundo. A riqueza pedagógica reside na diversidade dos processos.

Caberia aqui, portanto, uma redefinição do papel do professor no processo ensino e aprendizagem. Em vez de ditar as regras, fazendo uso de um método genérico e abrangente, o professor passa a reconhecer que a aprendizagem exige artifícios, capazes de melhorar a qualidade das interações com os alunos. Além disso, a aprendizagem nem sempre é intencional. Isso quer dizer que o aprendiz aprende mesmo aquilo que não lhe é ensinado, e isso nem sempre ocorre no momento e no ritmo que o professor gostaria. Assim, cabe ao professor criar ricas e múltiplas interações, que servirão de base para construir e elaborar um conhecimento sobre o mundo. A aprendizagem se enriquece na medida em que se amplia a qualidade das interações professor-aluno, aluno-aluno e aluno-meio. Segundo Piaget, o conhecimento é construído sucessiva e sequencialmente. Isto significa que a aprendizagem não ocorre de uma só vez. Ao contrário, ela se dá de forma permanente e gradativa, portanto, todo conhecimento é passível de melhoria. Ela começa a partir de conceitos mais amplos e progride no sentido de atingir uma diferenciação, onde, dentro de um todo, o aprendiz é capaz de reconhecer as partes. Diz-se, então,

que o progresso cognitivo se dá por diferenciação progressiva e integração permanente das partes. Sintetizando, podemos concluir que as idéias até aqui desenvolvidas se apóiam nos seguintes pressupostos:

1. O sujeito se constitui, enquanto sujeito, a partir de suas interações com os outros e com o mundo;
2. O sujeito progride de um estado de centralização para outro estado cada vez mais descentrado, através de descentrações sucessivas;
3. A construção do conhecimento é sucessiva e seqüencial;
4. A aprendizagem ocorre por diferenciação progressiva e seqüencial e integração permanente do conhecimento.

Redefinir o papel do professor passa, antes de tudo, pela consideração de que “ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua própria produção ou a sua construção.”²² O saber, necessário à prática docente, precisa ser sempre testemunhado, vivido de maneira concreta, prática e coerente, e decorre do reconhecimento de que foi por meio da aprendizagem realizada como prática social, que os seres humanos descobriram a possibilidade de ensinar. A construção do conhecimento exige, portanto, uma postura crítica do sujeito que aprende, a fim de propiciar-lhe a possibilidade de assumir-se como ser social e histórico e, dessa forma, capaz de intervir no mundo. Sob esse ponto de vista, quanto maior a dimensão crítica que se dá ao ato de aprender, mais o sujeito toma consciência de que é um ser inacabado, tornando cada vez mais necessária sua inserção num processo de busca permanente. É nesse contexto que, consciente de sua inconclusão, ele se assume como sujeito histórico-sócio-cultural e exercita cada vez mais e melhor sua capacidade de aprender e, conseqüentemente, de ensinar. A capacidade de ver-se a si mesmo como inacabado, dá, ainda, ao sujeito a consciência de sua presença no mundo, capaz de nele intervir, de avaliar, optar, comparar, transformar de modo positivo ou negativo. É nesses domínios que se instaura a necessidade da ética e da responsabilidade.

O cotidiano da sala de aula e fora dela, deve refletir, portanto, uma prática docente que, ao contemplar o ensino competente dos conteúdos, implica, ao mesmo tempo, no testemunho ético do professor. Sua presença, por si só política, revela aos seus alunos sua capacidade de analisar, optar, tomar decisões e constrói neles a percepção desse testemunho. Entretanto, não se vive eticidade sem liberdade. Assim, “o clima de respeito que nasce das relações justas, sérias, humildes, generosas, em que a autoridade docente e as

²²Freire, Paulo - Pedagogia da autonomia, pag 52

liberdades dos alunos se assumem eticamente, autentica o caráter formador do espaço pedagógico ²³.

O educando, respeitado em sua liberdade de questionar, de criticar e de assumir posições, estará continuamente construindo sua própria autonomia. A liberdade, amadurecida no confronto com outras liberdades, tem seus limites definidos e reconhecidos e resulta na possibilidade do sujeito assumir eticamente sua autonomia e a respeitar a autonomia dos outros, reconhecendo que qualquer discriminação é imoral. É através de uma postura democrática, da consciência de sua responsabilidade ética no exercício do magistério, que o professor torna-se capaz de provocar o educando a se assumir como sujeito histórico-sócio-cultural do ato de conhecer, a perceber-se como arquiteto de sua própria prática cognoscitiva ²⁴. Ao mesmo tempo abre-lhe espaço para a busca de sua dignidade e de sua autonomia, ao reconhecer-se como ser condicionado por fatores diversos, mas jamais determinado.

O modelo cognitivo

O modelo consiste, basicamente, em uma orientação geral que permite organizar e planejar a intervenção docente de modo compatível com os mecanismos funcionais que regem os processos de aprendizagem. Ele está fundamentado nas três etapas piagetianas de construção de conhecimento: as tríades dialéticas que Piaget e colaboradores denominam etapas INTRA, INTER e TRANS.

O que pretende cada etapa

INTRA: estabelecer qualidades observáveis, capazes de conferir sentido à experiência, e que privilegiam as características do objeto de estudo.

Exemplo: O planejamento proposto para a unidade campo magnético sugere que, nesse primeiro momento, o aluno focalize o problema a partir dos elementos mais visíveis: o que são ímãs, solenóides, pólos magnéticos.

INTER: tem por base as construções precedentes e enfatiza as relações entre variáveis e as transformações.

Exemplo: Nesse nível, os observáveis são as atrações e repulsões mútuas

²³Idem, pag 103

²⁴Idem, pag 140

ou o movimento de uma agulha magnética.

TRANS: comporta maior grau de generalidade e de estruturação e corresponde ao nível no qual uma teoria acerca do assunto é formulada.

Exemplo: Pólos de nomes opostos se atraem ou cargas elétricas em movimento produzem efeitos magnéticos.

NÍVEL	INTRA	INTER	TRANS
	CARACTERÍSTICAS	RELAÇÕES	TRANSFORMAÇÕES
I O IMÃ	Do ímã • Apresenta dois pólos. • Pode ser quebrado em partes que continua mantendo suas características.	• ímã / ímã • ímã / bússola • atração / repulsão	• Um ímã possui dois pólos magnéticos: pólo norte e pólo sul. • Os pólos de um ímã não podem ser separados. • O ímã é constituído por ímãs elementares.

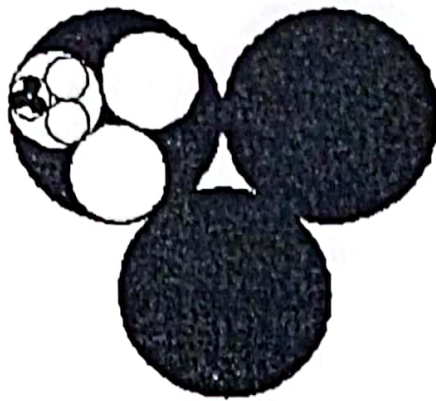
Cada um desses elementos apóia-se e torna-se possível, a partir das construções precedentes, num processo de continuidades e rupturas. No processo de construção do conhecimento, esses níveis pretendem responder a três questões fundamentais; 1) O que é isso? 2) Como isso funciona? 3) Como podemos explicar? que irão compor uma visão global do objeto de conhecimento.

A etapa INTRA, refere-se a primeira fase de equilibração, decorrente da interação fundamental entre os esquemas do sujeito e os objetos a assimilar. A INTER é segundo patamar de equilibração, que consiste na busca do equilíbrio entre os esquemas de assimilação que compõem o quadro conceitual do sujeito, a partir de um jogo de assimilações e acomodações recíprocas. Já a TRANS representa a terceira forma de equilibração e implica, além disso, na integração dos subsistemas de forma a construir uma nova totalidade, subordinando as transformações da fase anterior a grandes estruturas de conjunto.

É importante ressaltar que a última etapa (TRANS) será a primeira de uma nova tríade.

Conclusão

Acreditamos que um modelo de ensino assentado sobre os aspectos funcionais que regem a aprendizagem permite estruturar o processo de modo a reconhecer e valorizar o progresso dos estudantes e as dificuldades que eles encontram frente ao conhecimento científico, abrindo a possibilidade de superar o



confinamento do construtivismo pedagógico às séries iniciais do ensino fundamental.

Referências

- [1] AGUIAR JR, O., As três formas da equilibração: Análise do material didático de um curso de eletricidade básica. Cad. Cat. Ens. Fis., v.16, n.1: p.72-91, abr. 1999.
- [2] AGUIAR JR., O. e SARAIVA, JOÃO F., Modelo de Ensino para Mudanças Cognitivas: Fundamentação e Diretrizes de Pesquisa, Ensaio - Pesq. Educ. Ciênc.. 1999, Vol. 1, Nº1, 47-67.
- [3] FREIRE, Paulo, Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática docente, São Paulo. Ed. Paz e Terra, 4ª ed., 1996 (coleção Leitura)
- [4] PIAGET, J., A Representação do Mundo na Criança, Trad., R. Fiuza. Rio de Janeiro, Ed Record, 1978.
- [5] PIAGET, J. e GARCIA, R, Psicogênese e História das Ciências Trad., M. F. M. R. Jesúno. Coleção Ciência Nova, nº 6, Lisboa, Publicações Dom Quixote, 1987.
- [6] PIAGET, J. e INHELDER, B., O desenvolvimento das quantidades físicas na criança. Conservação e Atomismo, Trad., C. M. Oiticica. 2a. Rio de Janeiro. Ed. Zahar/INL, 1975.
- [7] RIOS, T. A., Ética e competência, 8. ed. São Paulo: Cortez, 1999. 86 p.(Coleção Questões da Nossa Época, 16).

Anexo

Exemplo de atividade

INTERAÇÃO ENTRE ÍMÃS E UMA BÚSSOLA

Material necessário: Ímãs diversos; Bússolas.

Desenvolvimento da atividade: o Todos já viram uma bússola e sabem que ela sempre aponta aproximadamente para o norte geográfico da Terra.
o Utilize uma bússola e determine a direção norte-sul, marcando-a com giz sobre sua carteira ou no chão. Compare seus resultados com os obtidos por seus colegas.

1. Todas as bússolas indicam direções paralelas? O que poderia ter provocado um resultado diferente encontrado por você ou outro colega?
2. Aproxime de sua bússola de um ímã de barra; faça isso colocando-o a várias distâncias com relação à bússola. O que acontece com a direção indicada pela bússola?
3. Que direção assumiria a agulha da bússola se ela não estivesse submetida à influência de nenhum ímã?

Vamos agora estudar algumas características da interação de ímãs.

o Com o auxílio da bússola, você pode determinar os pólos magnéticos dos ímãs. Aproxime um ímã de barra da bússola, como mostra a figura 1. A extremidade do ímã que atrair o pólo norte da agulha será o pólo sul e vice-versa.

o Tome os ímãs que você possui e identifique o pólo norte de cada um marcando-os com uma fita adesiva vermelha.

4. Coloque dois ímãs separados por uma distância de 1 cm, na posição indicada em (a) na figura 2; repita o procedimento fazendo os ímãs se disporem como em (b), e depois como em (c). Descreva o que acontece em cada caso.
5. O que você conclui a respeito da força que se estabelece entre os ímãs?
o Utilize agora o ímã de geladeira (borracha imantada), que você possui, para realizar a seguinte experiência: depois de assinalado o pólo

norte do ímã, corte-o, utilizando um estilete, como mostra a figura 3. Descreva o que acontece com a força de interação entre as partes cortadas.

6. O que você conclui a respeito das partes que foram cortadas do ímã?
O que aconteceria se você continuasse cortando o ímã em pedaços cada vez menores?



Figura 1



Figura 2

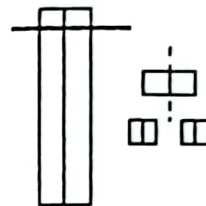


Figura 3

Jogo Das Operações

Eduardo Sarquis Soares²⁵

Resumo

Este jogo tem por objetivo proporcionar aos participantes uma investigação do universo dos números decimais e das operações através de uma atividade lúdica. O jogo consiste de dois conjuntos de cartas: cartas com números e cartas com operações. Em cada rodada, os participantes devem sortear cartas e organizá-las em uma expressão numérica tentando obter o maior resultado possível. As regras do jogo podem ser modificadas de acordo com os objetivos de quem o propõe. Podem ser acrescentadas outras operações, como a potenciação, e podem ser mudados os objetivos para se alcançar a vitória. O vencedor poderá ser, por exemplo, aquele que conseguir o menor resultado em uma expressão numérica. Depois que os praticantes adquirem uma certa familiaridade com o jogo, algumas descobertas serão destacadas pela intervenção de um coordenador, ou um professor quando aplica o jogo como atividade em sala de aula. Esse coordenador vai propor questões que ajudarão os jogadores a tomarem consciência de algumas propriedades das operações, como a comutatividade, por exemplo, além de dirigir uma exploração sobre a natureza dos números racionais.

O Jogo das Operações

Este jogo é ideal para 4 participantes. O objetivo é conseguir o maior resultado de uma sentença matemática manipulando cartas com números e cartas com operações.

Material Necessário

o 16 cartas de baralho feitas de cartolina.

²⁵Faculdade de Filosofia Ciências e Letras de Sete Lagoas

- o 20 cartas de mesmo tamanho feitas de cartolina de cor diferente.
- o Uma calculadora, lápis e papel.

Como Jogar

- o Montagem das cartas:
 - Escrever uma das quatro operações em cada uma das 16 cartas de mesma cor. Espalhar igualmente as 4 operações entre as cartas.
 - Cada uma das outras 20 cartas deve conter um número, entre 0 e 9. Os números de 0 a 9 devem se repetir duas vezes.
- o Embaralhar os montes de cartas separadamente e colocá-los sobre a mesa.
- o Cada jogador retira 2 das cartas de operações e 3 cartas que contêm números.
- o Com as 5 cartas que retirou, o jogador forma uma seqüência com número, operação, número, operação, número. Escolhe a ordem em que deve colocar os números e operações formando uma sentença matemática e tentando conseguir o maior resultado possível. Deve seguir estas regras:
 - as operações de adição e subtração podem ser realizadas em qualquer ordem
 - uma operação de multiplicação sempre tem que ser realizada primeiro que uma operação de adição ou de subtração
 - uma operação de divisão sempre tem que ser realizada primeiro que a adição ou a subtração
 - quando a sentença tiver uma operação de divisão e outra de multiplicação, ou duas operações de divisão, o jogador pode usar parênteses para decidir que operação deve ser realizada em primeiro lugar.
- o O jogador pode usar uma calculadora para encontrar o resultado da sentença matemática.
- o Quem conseguir o maior resultado ganha a rodada e marca 8 pontos. Se houver empate, os vencedores dividem os pontos.
- o As cartas são devolvidas e embaralhadas para uma nova rodada.
- o Os jogadores combinam o número de rodadas para o término do jogo e contagem dos pontos obtidos.

Explorando O Jogo Das Operações

1. Considerando todas as cartas do jogo, com qual sentença matemática

se obtém o maior resultado? Que resultado é esse?

2. Que cartas garantem que o resultado de uma sequência será sempre zero?
3. Em quais situações o resultado da expressão numérica será o mesmo independentemente das posições em que forem organizadas as cartas?
4. Encontre os resultados destas duas sequências de cartas:

A) $\boxed{8} \quad \boxed{+} \quad \boxed{3} \quad \boxed{-} \quad \boxed{2}$ B) $\boxed{9} \quad \boxed{+} \quad \boxed{5} \quad \boxed{-} \quad \boxed{1}$

Qual dos dois resultados é maior? Explique com um desenho, mostrando as posições dos resultados obtidos na reta numérica.

5. Encontre os resultados destas sentenças organizadas em pares:

A. $4x(2 \div 9) = 6x(1 \div 8) =$ B. $6 \div 5 - 1 = 8 \div 3 - 2 =$

C. $(3 \div 5) \div 8 = (7 \div 9) \div 8 =$ D. $(7 \div 8) \div 9 = (3 \div 8) \div 5 =$

Compare os pares para verificar: qual dos dois resultados obtidos é menor?

Experimente com as cartas do jogo: com que sequência de cartas se obtém, como resultado, o menor número decimal?

6. Observe estas operações incompletas:

$6 \times A = 3$ $5 \div B = 10$ $8 \times C = 4$ $7 \div D = 14$

$8 \times E = 1$ $4 \div F = 16$ $9 \times G = 3$ $7 \div H = 70$

Descubra, o número que deve substituir cada letra para que os resultados das operações fiquem corretos?

7. Qual é o menor resultado negativo possível de ser obtido no jogo?
8. Que cartas garantem que vai ser impossível obter o resultado da expressão?

0	1	2	3	4	5
6	7	8	9	0	1
2	3	4	5	6	7
8	9	+	-	×	÷
+	-	×	÷	10	10

As Novas Tecnologias como Recurso Didático no Processo da Educação Matemática

Constantino Veríssimo dos Santos Filho ²⁶

Resumo

O uso de tecnologias no campo da educação não é um fato recente, o debate sobre o seu uso é que tem se intensificado nas últimas décadas. Essa palestra tem o objetivo de contribuir para o enriquecimento dessas discussões, tendo como referencial dados coletados por meio de uma pesquisa sobre a utilização das novas tecnologias (computadores) no campo da educação matemática, realizada num colégio de ensino médio da grande Belo Horizonte. Dessa pesquisa foram retiradas algumas questões que servirão de indicadores para esta palestra, tais como: O paradoxo do discurso de uma necessidade premente da utilização das novas tecnologias como forma de inclusão e a resistência velada ou em algumas situações declarada por parte do sistema educacional; A angústia que permeia alguns docentes empenhados em se fazerem pertencentes a essa nova era; A forma de utilização do computador como recurso didático para o ensino da função matemática na escola pesquisada; As contribuições e restrições percebidas pelos alunos e professores entrevistados, quando da utilização do computador como recurso didático no campo da educação matemática.

Apresentação

As tecnologias não podem ser entendidas como uma necessidade atual do homem. Desde os primórdios da humanidade constatamos a criação de tecnologias no intuito de suprir as necessidades e as adversidades inerentes ao seu ambiente e ao seu cotidiano, exemplos simples como a descoberta e o

²⁶Professor do Unicentro Newton Paiva, Fuminas e Colégio Marista Dom Silvério. [constantinofilho@yahoo.com.br]

aprimoramento do uso do fogo. A partir dessa descoberta o homem estabelece a resignificação: do seu hábito alimentar e também do desenvolvimento tecnológico das indústrias; fatores que esclarecem a necessidade contínua do homem pela busca da sobrevivência e transcendência.

Entender a busca pela sobrevivência e transcendência; o uso da tecnologia como extensão do corpo; e o papel da escola como um dos organismos que propiciam a adequação do indivíduo na sociedade; fornece subsídios para compreendermos os fatores que culminaram com a introdução dos computadores no ambiente escolar, cujo papel sempre foi o de contribuir para a formação de um indivíduo capaz de se fazer pertencente à sociedade. Porém, os anseios dessa sociedade ampliaram e hoje requisitam que a escola forneça aos alunos habilidades necessárias para a transposição do ensino médio para o ensino superior, ou seja, estar apto a enfrentar as barreiras do vestibular.

Com o advento dos anos 70, tem-se início a um desenvolvimento tecnológico com proporções exponenciais, cujo catalisador é a microeletrônica, componente básico da maioria dos eletrodomésticos atuais e dos computadores. Esses, até então objetos exclusivos das grandes empresas e universidades de grande porte começam a ser disseminados pela sociedade incluindo evidentemente as escolas. Nos anos 80, a ênfase para o uso dos computadores nas escolas é tal que alguns pesquisadores atribuem ao mesmo o papel de resignificador do processo educacional, modificando essa conotação à partir dos anos 90 para uma importante ferramenta do processo ensino-aprendizagem.

Um dos aspectos mais significativos da contribuição do computador no processo educacional evidencia-se na sua capacidade de propiciar a experimentação, seja por meio de softwares simuladores de: ambientes, laboratórios, gráficos; através de várias conjecturas propostas pelo professor numa interação mais tênue com os alunos.

No campo da Educação Matemática, observam-se pesquisas sobre a utilização da tecnologia como ferramenta para o ensino da matemática. A utilização de uma nova tecnologia como recurso didático advém do próprio significado da matemática como uma estratégia desenvolvida pela humanidade para estabelecer o entendimento e manipulação da realidade, sob a influência do seu contexto natural e cultural. Pressupõe uma diferenciação quando existe uma variação na geografia, na história dos indivíduos e dos diversos grupos culturais a que pertencem. Já a educação trata da estratégia que esses grupos desenvolvem com a finalidade de estabelecerem a manutenção do seu estado atual e na promoção de avanços necessários para a sua evolução.

Os anseios diante das novas tecnologias sempre existiram e os processos culturais sempre estarão influenciando, o que norteia a contradição do salto da sobrevivência de uma sociedade para a sua transcendência. Se esses anseios tomassem força maior do que a necessidade de transcendência, hoje

não existiriam nas casas água quente, televisão, e na educação desapareceriam tecnologias como o lápis, a borracha, a caneta e os quadros não mais existiriam.

Existem varias pesquisas e experimentos sendo realizados com o objetivo de contribuir com a discussão sobre o ensino da matemática com a utilização do computador. A formação acadêmica direcionada para retransmitir informação propicia uma grande angustia no professor. Numa época em que as transformações ocorrem numa velocidade cada vez maior, é como estar presente e atuante como co-criador de uma nova realidade. A esquematização *emissor → mensagem → receptor*, não faz mais sentido numa sociedade cujo ícone é *velocidade e interação*, e que possui a consciência de que todos sofrem ação do meio em que vivem e influem nele ao mesmo tempo.

Alterar o processo ensino-aprendizagem pressupõe também repensar vários aspectos que o compõem, sejam eles: Formação do Professor; A nova posição do professor, de emissor para mediador do conhecimento; O paradoxo do sistema educacional que clama por mudanças ao mesmo tempo em que a olha com pessimismo; O professor que se direciona por livros didáticos, por um professor que se direciona pela excelência de aprendizado dos seus alunos.

É inegável o medo em todo ser humano quando o assunto se refere àquilo que é desconhecido, mas esse medo tem como característica estabelecer a cautela por meio de um cuidado maior com o que se irá efetivar, portanto, não significa desistência ou paralisia. A história está repleta de exemplos de pessoas que romperam suas barreiras e seguiram em frente em busca de um ideal, apesar de todo o medo.

Para entender o sentido do prazer pelo aprendizado sob a influência das novas tecnologias, basta presenciar uma aula no laboratório de informática devidamente planejada com desafios a serem vencidos. É a quebra do saber emanado somente do professor, para uma socialização intensa entre alunos, computador, software, e evidentemente o professor. Observar alunos em uma discussão acalorada sobre suas constatações quando digitaram uma família de funções num software gráfico, e a resposta fornecida pelo mesmo.

O que se propõe não é o abandono das aulas expositivas em detrimento de outras formas de aula. O que se espera é que a escola, assim como a sociedade, absorva e interfira nas contribuições que as novas tecnologias trazem, lembrando-se que no surgimento de cada nova tecnologia, houve a absorção da nova, de uma forma gradual com um objetivo bem claro de preservar o que de benéfico existia na anterior. Basta olharmos as transições do surgimento da tecnologia que permeia a fala, até chegarmos na tecnologia que permeia nosso principal meio de comunicação atual, a internet. Não houve sobreposição e sim uma convivência, uma complementação.

Matemática Divertida: trabalhando frações e números decimais com jogos matemáticos

Cibele Vieira Teixeira Coelho ²⁷

Resumo

Este trabalho relata a experiência de um projeto de ensino desenvolvido com alunos da 5ª série do Ensino Fundamental com o objetivo de trabalhar os conceitos de frações e números decimais de uma forma lúdica, capaz de mobilizar e envolver os estudantes num processo de aprendizado que fosse significativo para eles.

Justificativa

Diante das dificuldades de compreensão por parte dos alunos, dos conceitos de frações e suas aplicações, procurei, por meio do desenvolvimento de jogos matemáticos, ampliar esse conhecimento partindo do pressuposto de que a utilização inicial de frações equivalentes e as relações fração/número decimal colaboram para a construção de uma série de conceitos e, conseqüentemente, de algoritmos.

Conteúdo

O desenvolvimento do projeto envolveu os seguintes conteúdos:

- ◇ Equivalência de frações;
- ◇ Representação de frações na forma decimal e número decimal em forma de frações;
- ◇ Adição e subtração de frações e números decimais;
- ◇ Comparação de frações/números decimais.

²⁷Professora do Colégio Cenecista Márcio Paullino - Sete Lagoas.

Objetivos

Ao desenvolver o projeto tinha em mente levar os alunos a atingir os seguintes objetivos:

- ◇ Dominar as relações de equivalência entre frações e decimais;
- ◇ Compreender que a forma fracionária pode ser representada na forma decimal, assim como o número decimal pode ser representado na forma fracionária;
- ◇ Reconhecer, em qualquer forma, qual é o maior número;
- ◇ Resolver operações básicas (adição e subtração) com números na forma fracionária ou decimal.

Desenvolvimento do Projeto

A idéia inicial foi organizar as atividades em quatro etapas, assim distribuídas:

1ª aula: Orientação a respeito dos jogos, objetivos, procedimentos para confecção, definição dos prazos para confecção, formação dos grupos de trabalho, escolha do jogo que cada grupo iria confeccionar.

2ª aula: Definição, pelos grupos, das regras do jogo, do material necessário e distribuição das tarefas entre os componentes.

3ª aula: Confecção dos jogos.

4ª aula: Apresentação dos jogos, pelos grupos, com trocas entre grupos para experimentação.

Avaliação

Após a apresentação de todos os jogos, as turmas foram organizadas em duplas para jogar. Com isso, eles podiam avaliar e analisar os jogos confeccionados pelos colegas quanto a clareza das regras, ao conteúdo abordado, a criatividade e a organização. Ao jogar, alguns alunos perceberam falhas nos jogos quanto a regras ou conceitos matemáticos que estavam errados.

Aplicabilidade

Os jogos desenvolvidos pelos alunos passaram a ser utilizados durante o período de desenvolvimento do conteúdo, de acordo com as possibilidades e necessidades de cada turma.

Conclusão

O desenvolvimento desta atividade permitiu trabalhar os conteúdos matemáticos de uma forma mais significativa. Com isso, a participação e o interesse dos alunos pelas aulas aumentou bastante, mostrando ser possível conciliar aprendizado com diversão.

REALIZAÇÃO:

Curso de Matemática da FAFISETE

